НИУ Высшая школа экономики
Факультет социальных наук (департамент политической науки)

Теория игр
2019/2020 учебный год
(*Л. Н. Сысоева, Н.А. Василенок, Н. Е. Сахарова,
Д. А. Дагаев, К. И. Сонин, И. А. Хованская*)

Домашнее задание 5
(*срок выполнения — 15 октября 2019 года*)

Доброе напоминание:
Ответ без решения не засчитывается.

Задание 1. Турнир по игре «Танковая битва»

Описание игры «Танковая битва»

1. Играют двое.

2. Поле игры представляет собой доску размера 3 на 3. Горизонтали пронумерованы цифрами от 1 до 3, а вертикали — буквами от a до c.

3. Каждый игрок располагает армией в 100 танков.

4. Перед битвой ночью каждая сторона втайне размещает свои танки произвольным способом на 9 клетках. На каждую клетку можно поставить любое целое число танков от 0 до 100.

5. Утром начинается сражение. На каждой из 9 клеток побеждает тот игрок, у кого на этой клетке стоит больше танков. За победу на каждой из 9 клеток дается 1 очко. Если на некоторой клетке стоит одинаковое число танков двух сторон, то сражение на этой клетке заканчивается вничью, и оба игрока получают 0,5 очка.

Общие положения турнира

0. В турнире участвуют все желающие студенты-политологи 3 курса.

1. Каждый желающий студент заявляет на турнир *одну* стратегию в игре «Танковая битва».

2. Каждый студент заявляет на турнир *самостоятельную* стратегию.

3. Крайний срок подачи стратегии на турнир — пятница, 18 октября 2018 года, 23:59:59.

4. Стратегия заявляется на турнир исключительно путем заполнения Google формы по следующей ссылке. Изменить заявленную стратегию после отправки формы нельзя.

5. Все поданные на турнир стратегии сыграют друг с другом в круговом турнире, то есть каждая стратегия сыграет с каждой по одному разу.

6. Победитель турнира определяется по сумме набранных очков во всех играх.

7. Автор(ы) лучшей(их) стратегий по итогам турнира получит(ат) один бонусный балл к оценке за курс «Теория игр».

Желаем всем участникам турнира удачных поединков!

Задание 2. Основной работой жителей племени Тумба-Юмба является сбор бананов. В конце рабочего дня каждый житель отдает некоторую долю собранных им бананов поварам племени, а остальное забирает себе и продает на соседний остров, где бананы не растут. Скоро в племени Тумба-Юмба состоятся выборы предводителя. На главный пост претендуют два кандидата, говорящие на языке Тумба и два кандидата, говорящие на языке Юмба. Выборы происходят по следующему правилу. В первом туре жители, говорящие на языке Тумба, выбирают своего кандидата в предводители, а жители, говорящие на языке Юмба, — своего.[1] Во втором туре все племя выберет из них единого предводителя.[2]

Выбранному предводителю предстоит решать сложный вопрос о доле α бананов, отдаваемых каждым жителем после сбора поварам. Традиционно жители, говорящие на языке Тумба, предпочитают частную собственность ($\alpha \in [0; 0.5]$), а жителям, говорящим на языке Юмба, нравится централизованное питание на острове в общественных столовых ($\alpha \in [0.5; 1]$). Рассмотрим вариант модели Даунса для случая двухэтапного политического позиционирования. Идеальные точки избирателей распределены непрерывно и равномерно на отрезке $[0; 1]$. Каждый кандидат старается максимизировать вероятность своей победы на выборах. Перед первым туром каждый кандидат раз и навсегда выбирает свою позицию на отрезке $[0; 1]$, причем кандидаты, говорящие на языке Тумба, выбирают точку на отрезке $[0; 0.5]$, а говорящие на языке Юмба — на отрезке $[0.5; 1]$. Обозначим стратегии кандидатов A, B, C, D через a, b, c, d соответственно. Какие из следующих профилей являются равновесием Нэша:

а) *(2 балл)* $(a, b, c, d) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$;

б) *(2 балл)* $(a, b, c, d) = \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{4}{5}\right)$;

в) *(2 балл)* $(a, b, c, d) = \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$?

Указание к решению. Во всех приведенных случаях нужно или доказать, что профиль не является равновесием Нэша, то есть указать кому из игроков и куда выгодно отклониться, или, наоборот, доказать, что профиль является равновесием Нэша, то есть доказать, что никому из игроков не выгодно отклоняться от выбранной стратегии.

Задание 3. Рассмотрим игру в нормальной форме, заданную матрицей

	t_1	t_2	t_3
s_1	-1;2	16;-1	5;2
s_2	2;-4	0;4	4;-1
s_3	4;-4	-2;4	9;0
s_4	1;-4	-2;4	1;3

а) *(2 балла)* Найдите все строго доминируемые чистые стратегии у игроков в данной игре (разрешается использовать смешанные стратегии). Укажите какие стратегии какими доминируются. Исключите строго доминируемые чистые стратегии из игры.

[1] Об этом туре можно думать, как о голосовании внутри двух избирательных округов.
[2] Об этом туре можно думать, как о голосовании внутри единого избирательного округа.

б) *(2 балла)* Выпишите ожидаемые платежи игрока, у которого на предыдущем шаге не нашлось строго доминируемых стратегий, при выборе им каждой его чистой стратегии, если его оппонент смешивает свои не исключенные на предыдущем шаге стратегии с вероятностями α и $1-\alpha$. Нарисуйте графики зависимости ожидаемых платежей этого игрока от вероятности α.