

Факультет социальных наук (департамент политической науки)  
Теория игр, 2019-20 уч. год  
Задача про уборку в Дубках

**Условие.** Алексей и Михаил поступили в Вышку и стали соседями по комнате Дубках. Ребята договорились убираться в комнате каждую неделю по субботам. Итоговая чистота комнаты (обозначим ее за  $G$ ) зависит от того, сколько усилий каждый из них прикладывает к уборке. Обозначим эти уровни усилий за  $x_a$  (для Алексея) и  $x_m$  (для Михаила). Для простоты будем считать, что  $G = x_a + x_m$ .

Каждый из студентов хотел бы, чтобы комната была чистой, однако оба не любят убираться, причем Алексей не любит уборку вдвое сильнее, чем Михаил. Это отражено в их функциях полезности: полезность Михаила равна  $G \times (8 - x_m)$ , а полезность Алексея имеет вид  $G \times (8 - 2x_a)$ .

Расписание устроено так, что по субботам в первой половине дня в комнате отсутствует Алексей, а во второй — Михаил. Когда Алексей приходит с учебы, он видит «промежуточную» степень чистоты комнаты (равную уровню усилий Михаила) и принимает решение о том, сколько усилий приложить для завершения уборки. Каковы будут уровни усилий, которые будут прикладывать Алексей и Михаил к уборке? Каков будет итоговый уровень чистоты комнаты?

**Решение.** Формализуем игру: зададим игроков, их стратегии и функции полезности.

$$I = \{A, M\}$$

$S_A = x_a \in [0; +\infty)$  — будем считать, что уровень усилий не может быть отрицательным

$$S_M = x_m \in [0; +\infty)$$

$$u_A(x_a, x_m) = (x_a + x_m) \times (8 - 2x_a)$$

$$u_M(x_a, x_m) = (x_a + x_m) \times (8 - x_m)$$

Тайминг игры: сначала ход принадлежит Михаилу, затем ход принадлежит Алексею. Можно нарисовать условное дерево с бесконечным количеством стратегий у каждого из игроков.

Теперь можно решать игру методом обратной индукции.

1. Последним ход принадлежит Алексею. Найдем, как будет выглядеть лучший ответ Алексея на разные стратегии Михаила, максимизировав платеж Алексея при фиксированной стратегии Михаила. Это можно сделать, взяв производную функции полезности Алексея и приравняв ее к нулю.

$$[(x_a + x_m) \times (8 - 2x_a)]'_{x_a} = 0$$

$$[8x_a - 2x_a^2 + 8x_m - 2x_ax_m]'_{x_a} = 0$$

Запись выше означает, что мы берем производную по переменной  $x_a$ , тогда как переменная  $x_m$  считается за константу. Действительно, ведь Алексей, возвращаясь домой, принимает выполненную Михаилом уборку как факт, не будучи в силах повлиять на уже принятое решение Михаила.

Чтобы было проще, можно представить так:

$$[8x - 2x^2 + 8c - 2xc]'_x = 0$$

Пользуясь правилами дифференцирования, находим:

$$8 - 4x_a - 2x_m = 0$$

$$4 - 2x_a - x_m = 0$$

$$x_a = \frac{4 - x_m}{2}$$

Таким образом, мы нашли, как Алексей может максимизировать свой платеж в зависимости от любой возможной стратегии Михаила.

2. Теперь Михаил, предсказывая, как поведет себя Алексей, может рассчитать свой уровень усилий, максимизирующий его платеж. Мы точно так же возьмем производную от функции полезности Михаила, но теперь подставим в нее рассчитанный выше уровень усилий Алексея.

$$\left[\left(\frac{4 - x_m}{2} + x_m\right)(8 - x_m)\right]_{x_m}' = 0$$

$$\left[\left(\frac{4 - x_m}{2} + \frac{2x_m}{2}\right)(8 - x_m)\right]_{x_m}' = 0$$

$$\left[\frac{4 + x_m}{2}(8 - x_m)\right]_{x_m}' = 0$$

$$\left[16 + 4x_m - \frac{4x_m + x_m^2}{2}\right]_{x_m}' = 0$$

$$[16 + 2x_m - 0.5x_m^2]_{x_m}' = 0$$

$$2 - x_m = 0$$

$$x_m = 2$$

3. Теперь рассчитаем равновесный уровень усилий Алексея:  $x_a = 1$  и итоговый уровень чистоты комнаты:  $G = 1 + 2 = 3$

Ответ:  $x_a = 1$ ,  $x_m = 2$ ,  $G = 3$