

Факультет социальных наук (департамент политической науки)
Теория игр, 2019-20 уч. год
Что делал тигр, когда пришел Наполеон?

Войска Наполеона начинают наступление на Андалусию. Они могут пройти через горы или через равнины.¹ Защищающая Испанию, армия принимает решение, укреплять свои гарнизоны в горах или на равнинах. Если Наполеон нападает на незащищенную местность, он получает 1. Если он нападает на укрепленный гарнизон, он получает -1 . Если испанцы правильно предсказали направление наступления, они получают 1, в противном случае -1 . Формализуйте описанную игру.

Ответ:

Таблица 1: Наполеон и испанцы

И/Н	Горы	Равнины
Горы	1; -1	-1 ; 1
Равнины	-1 ; 1	1; -1

а) Старушка в деревне сказала Наполеону, что с вероятностью 0.7 испанцы будут защищать горы, и с вероятностью 0.3 – равнины. Запишите матрицу игры, в которой испанцы играют описанную выше стратегию, и найдите лучший ответ Наполеона на нее. Является ли такой профиль стратегий равновесием Нэша?

Ответ: Если в предыдущем случае испанцы делали выбор между двумя чистыми стратегиями, то теперь испанцы играют *одну смешанную*. При этом, матрица выигрышей изменит вид: из-за того, что испанцы рандомизируют, Наполеон, который все еще выбирает между своими чистыми стратегиями, тоже оказывается в ситуации неопределенности. Предположим, он выбирает свою стратегию *Равнины*. Но даже в этом случае он не знает, чем закончится игра: с вероятностью 0.7 это произойдет в профиле (*Горы, Равнины*), и он получит 1, и с вероятностью 0.3 это произойдет в профиле (*Равнины, Равнины*), и он получит -1 . Эту неопределенность можно формализовать с помощью понятия *ожидаемого платежа*, который рассчитывается как математическое ожидание выигрыша.

Таблица 2: Испанцы смешивают свои стратегии

И/Н	Горы	Равнины
$0.7(\text{Горы}) + 0.3(\text{Равнины})$	0.4; -0.4	-0.4 ; 0.4*

Лучший ответ Наполеона в такой ситуации – играть *Равнины*. Но профиль стратегий ($0.7(\text{Горы}) + 0.3(\text{Равнины})$, *Равнины*) не будет равновесием Нэша: при фиксированной стратегии Наполеона испанцам выгодно отклониться из своей смешанной стратегии и играть чистую стратегию *Равнины*. В этом случае они увеличат свой платеж с -0.4 до 1.

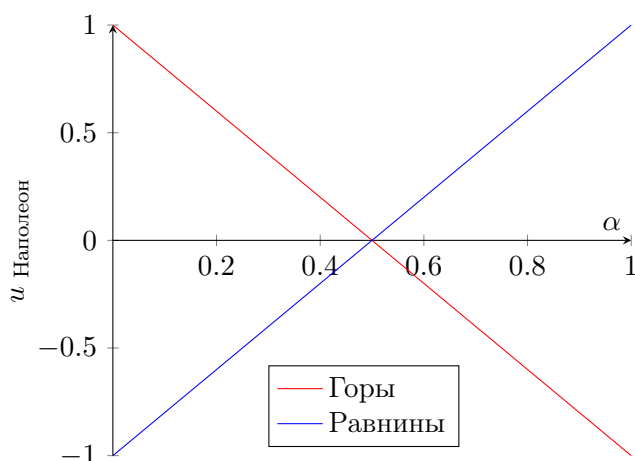
б) Нарисуйте график ожидаемого выигрыша Наполеона в зависимости от вероятности, с которой испанцы будут защищать горы, в каждой из его стратегий.

Ответ: Если Наполеон понимает, что испанцы могут смешивать стратегии, и делать это с любыми вероятностями α и $(1 - \alpha)$ (которых в промежутке от 0 до 1 бесконечно много), то он может рассчитать функцию своего ожидаемого платежа в каждой своей чистой стратегии, которая будет зависеть от вероятности, которую выбирают испанцы.

$$u_N(\alpha \text{Горы} + (1 - \alpha) \text{Равнины}, \text{Горы}) = (-1)\alpha + 1(1 - \alpha) = 1 - 2\alpha$$

$$u_N(\alpha \text{Горы} + (1 - \alpha) \text{Равнины}, \text{Равнины}) = 1\alpha + (-1)(1 - \alpha) = 2\alpha - 1$$

¹Про испанскую войну за независимость см. https://en.wikipedia.org/wiki/Peninsular_War.



Нарисуем график «стакана». Он показывает лучшие ответы Наполеона на любую возможную смешанную стратегию испанцев. Мы видим, что функции ожидаемых платежей пересекаются – это значит, что существует некоторая α , при которой ожидаемые платежи Наполеона одинаковы. Рассчитаем ее.

$$1 - 2\alpha = 2\alpha - 1$$

$$4\alpha = 2$$

$$\alpha = 0.5$$

Таким образом, у нас есть три случая различных лучших ответов Наполеона.

I. При $\alpha \in [0, 0.5)$ $BR_N = \text{Горы}$. Профили, где Наполеон выбирает стратегию *Горы*, а испанцы – стратегии, лежащие в этом промежутке α , не могут быть равновесиями Нэша, так как при фиксированной стратегии Наполеона испанцам будет выгодно отклониться в чистую стратегию.

II. При $\alpha \in (0.5; 1]$ $BR_N = \text{Равнины}$. Профили, где Наполеон выбирает стратегию *Равнины*, а испанцы – стратегии, лежащие в этом промежутке α , также не могут быть равновесиями Нэша, так как при фиксированной стратегии Наполеона испанцам будет выгодно отклониться в чистую стратегию.

III. При $\alpha = 0.5$ все стратегии Наполеона – как чистые, так и смешанные, будут его лучшим ответом, так как все они будут приносить *одинаковый ожидаемый платеж*. Если Наполеон будет играть фиксированные чистые стратегии, то у испанцев также появится мотивация отклониться в чистые стратегии. Но если Наполеон будет смешивать, то где-то здесь у нас могут появиться равновесия Нэша.

в) Испанцы ожидают, что Наполеон будет принимать решение о нападении, подбрасывая правильную монетку. Запишите матрицу игры, в которой Наполеон играет описанную выше стратегию, и найдите лучший ответ испанцев на нее. Является ли такой профиль стратегий равновесием Нэша?

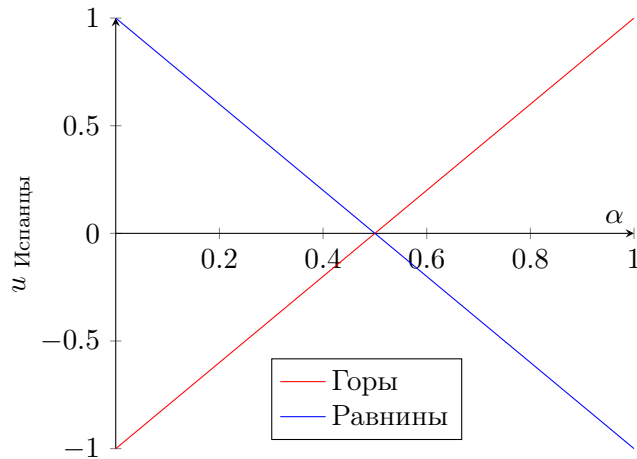
Попробуйте сделать самостоятельно.

г) Нарисуйте график ожидаемого выигрыша испанцев в зависимости от вероятности, с которой Наполеон будет нападать на горы, в каждой их стратегии.

Ответ: Теперь считаем, что Наполеон смешивает свои стратегии с вероятностями β и $(1 - \beta)$. Рассчитаем ожидаемые платежи испанцев в их чистых стратегиях:

$$u_{II}(\text{Горы}, \beta\text{Горы} + (1 - \beta)\text{Равнины}) = 1\beta + (-1)(1 - \beta) = 2\beta - 1$$

$$u_{II}(\text{Равнины}, \beta\text{Горы} + (1 - \beta)\text{Равнины}) = (-1)\beta + 1(1 - \beta) = 1 - 2\beta$$



Аналогично предыдущему случаю, у испанцев есть три ситуации различных лучших ответов на любые смешанные стратегии Наполеона.

I. При $\beta \in [0, 0.5)$ $BR_{II} = \text{Равнины}$. Профили, где испанцы выбирают стратегию *Равнины*, а Наполеон – стратегии, лежащие в этом промежутке β , не могут быть равновесиями Нэша, так как при фиксированной стратегии испанцев Наполеону будет выгодно отклониться в чистую стратегию.

II. При $\beta \in (0.5; 1]$ $BR_{II} = \text{Горы}$. Профили, где испанцы выбирают стратегию *Горы*, а Наполеон – стратегии, лежащие в этом промежутке β , также не могут быть равновесиями Нэша, так как при фиксированной стратегии испанцев Наполеону будет выгодно отклониться в чистую стратегию.

III. При $\alpha = 0.5$ все стратегии испанцев – как чистые, так и смешанные, будут их лучшим ответом, так как все они будут приносить *одинаковый ожидаемый платеж*. Если испанцы будут играть фиксированные чистые стратегии, то у Наполеона также появится мотивация отклониться в чистые стратегии. Но если мы найдем такие вероятности, с которыми испанцы будут так смешивать свои стратегии, что и Наполеону не будет выгодно отклоняться из фиксированной смеси стратегий $(0.5(\text{Горы})+0.5(\text{Равнины}))$, то мы найдем равновесие Нэша.

д) Есть ли в этой игре равновесия Нэша?

Ответ: В этой игре не существует равновесия Нэша в чистых стратегиях (почему?). Но в этой игре есть равновесие в смешанных стратегиях, и это профиль $(0.5(\text{Горы})+0.5(\text{Равнины}), 0.5(\text{Горы})+0.5(\text{Равнины}))$.

Если испанцы смешивают свои стратегии с $\alpha = 0.5$, то любая стратегия Наполеона будет лучшим ответом, так как они все принесут одинаковый ожидаемый платеж. Но, как мы уже увидели, при фиксировании каких-то из этих стратегий Наполеона у испанцев может появиться стимул изменить свою α .

Если Наполеон смешивает свои стратегии с $\beta = 0.5$, то любая стратегия испанцев будет лучшим ответом, так как они все принесут одинаковый ожидаемый платеж. Но, как мы уже увидели, при фиксировании каких-то из этих стратегий испанцев у Наполеона может появиться стимул изменить свою β .

Можем ли мы найти профиль из смешанных стратегий, который будет состоять из взаимно лучших ответов? Да! Если каждый из игроков выбирает такую вероятность, которая приносит другому игроку одинаковый ожидаемый платеж.